

УДК 622.24.05-004.4-658.382

АНАЛІЗ ВЗАЄМОДІЇ УЛЬТРАЗВУКОВОЇ ХВИЛІ НИЗЬКОЇ ІНТЕНСИВНОСТІ ЗІ ШКІРОЮ ТІЛА ЛЮДИНИ**Лютак І. З., Лютак З. П., Дитко Т. В.***Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, 46077, acoustic.field@gmail.com*

Проведено дослідження математичної моделі, що описує фізичний ефект акустичної левітації. Наведено побудову математичної моделі та представлено результати її обчислення. Розроблено числову модель акустичного левітатора, що дозволила визначити необхідні рівні енергій та комбінацію граничних умов для збудження такої стоячої акустичної хвилі, що може нести частинки, що не є однорідними із власне середовищем поширення хвилі. Встановлено необхідну масу та об'єм частинок, що можуть бути задіяними в ефекті акустичної левітації, діаметр яких повинен бути набагато меншим за довжину хвилі.

Ключові слова: акустична хвиля, левітація, рівняння Гельмгольца

Проведено исследование математической модели, описывающей физический эффект акустической левитации. Приведено построение математической модели и представлены результаты ее вычисления. Разработан числовую модель акустического левитатора, что позволило определить необходимые уровни энергий и комбинацию граничных условий для возбуждения такой стоячей акустической волны, что может нести частицы, которые не являются однородными с собственно средой распространения волны. Установлено необходимую массу и объем частиц, которые могут быть задействованными в эффекте акустической левитации, диаметр которых должен быть гораздо меньше длины волны.

Ключевые слова: акустическая волна, левитация, уравнение Гельмгольца

The study of a mathematical model describing the physical effects of acoustic levitation is made. The construction of the mathematical model and the results of its calculation is given. The numerical model of the acoustic levitator, which allowed to determine the energy levels and the combination of the boundary conditions for excitation of such a standing acoustic wave that can carry particles that are not homogeneous with the medium of wave propagation is developed. Set necessary weight and volume of the particles, which may be involved in the effect of acoustic levitation, the diameter of which should be much less than the wavelength are presented.

Key words: acoustic wave, levitation, Helmholtz equation

Вступ.

Дослідження енергетичних параметрів акустичної хвилі є важливим напрямком для ряду галузей народного господарства, зокрема машинобудівної та медичної. Застосування ефекту акустичної левітації на практиці може стати причиною спрощення багатьох технологічних операцій, що вимагають на даний час механічного контакту та відповідного знання механізмів та конструкцій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Основні принципи поширення акустичної хвилі в повітрі розвивались на протязі тривалого часу. Спроба узагальнення існуючих знань щодо поширення акустичної хвилі була здійснена рядом науковців [1]. Важливим напрямком досліджень як взаємодія акустичної хвилі із

границями розділу було започатковано Бергманом [3] та в подальшому реалізовано у вигляді числових алгоритмів на базі методів скінченних елементів [4]. Спроба моделювати ефект акустичної левітації була здійснена з урахуванням існуючих числових алгоритмів [5]. Для зменшення впливу на поширення акустичної хвилі від бічних стінок внаслідок явища рефракції акустичної хвилі скористаємось дослідженням Джіволі та Нета де для зменшення впливу відбитої хвилі, границі розділу розглядаються як напівнескінченне середовище [6].

Мета дослідження.

Метою цього дослідження є розроблення математичної моделі, що описує фізичний ефект левітації частинок в акустичному полі.

Математична модель поширення акустичної хвилі.

Найбільш загальною формулою, що описує поширення акустичної хвилі є лінеаризоване рівняння для ідеального стискуваного газу без врахування процесів розсіювання коливальної енергії [1]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \nabla \cdot v = 0, \quad (1)$$

де p – тиск, ρ – густина, t – час, c – швидкість

хвилі в середовищі поширення, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

- оператор Гамільтона, v – коливна швидкість.

Рівняння (1) має додаткові спрощення, зокрема його можна застосовувати тільки у випадках коли тиск середовища та його густина є константами. У випадку розгляду поширення акустичної хвилі у частотному діапазоні до 100 кГц, такі припущення справджуються.

Параметри коливної швидкості та тиску в (1) описують акустичні пертурбації при поширенні хвилі.

Другим рівнянням, що описує поширення акустичної хвилі, є рівняння Ейлера [1]:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p. \quad (2)$$

Рівняння (1) та (2) як система рівнянь може бути застосована до випадків, коли густина середовища та швидкість поширення хвилі є функцією просторових координат. Єдине рівняння для поширення хвилі може бути отримано із (2) підставивши похідну по часу із (1). Таке рівняння отримано Бергманом [2]:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) - \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Очевидно, що при умові константи густини середовища поширення в просторі (3) можна привести до більш простого вигляду [1]:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Рівняння (4) фактично є рівнянням Ейлера, що є класичним рівнянням акустики, яке можна записати у більш компактному вигляді [1]:

$$\Delta^2 p = 0, \quad (5)$$

де $\Delta^2 = \nabla^2 - c^{-2} \partial^2 / \partial t^2$ - оператор Д'аламбера.

Акустичну хвилю будемо розглядати як

гармонійну, тобто коливання значення тиску від збурення хвилі на одній частоті можна описати так [1]:

$$p = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (6)$$

де A – амплітуда коливань, ω - кутова частота, φ - фаза коливань.

У (6) важливим здобутком є те, що амплітуда та частота відділена від часу поширення хвилі. Це має як фізичний зміст, так і в подальшому дозволяє привести формулу поширення акустичної хвилі до частотної області. В частотній області акустичну хвилю можна представити інтегральним перетворенням Фур'є [1]:

$$p = \text{Re}(\hat{p} e^{-i\omega t}), \quad (7)$$

$$\text{де } \hat{p}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{i\omega t} dt \quad - \text{перетворення}$$

Фур'є, i – уявна одиниця.

Потрібно зауважити, що змінна тиску є комплексним числом, де уявна складова представляє зміну фази хвилі. За зміну амплітуди відповідає дійсна частина. Тепер рівняння поширення акустичної хвилі, описане частковими похідними у часовій області (5) можна представити у комплексній формі так [1]:

$$\text{Re}(\Phi e^{-i\omega t}) = 0, \quad (8)$$

де Φ - вираз, що залежить від комплексної Амплітуди і її просторових похідних, але не від часу.

Рівність (8) нулю та вимога, щоб це рівняння справджувалось для всіх значень часу можливе при умові рівності нулю виразу Φ . Форму Φ можна отримати зробивши заміну змінних у (1), (2), (4)

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega, \quad (9)$$

У частотній області рівняння (1), (2), (4) відповідно матимуть вигляд [1]:

$$-i\omega \hat{p} + \rho c^2 \nabla \cdot \hat{v} = 0, \quad (10)$$

$$-i\omega \rho \hat{v} = -\nabla \hat{p}, \quad (11)$$

$$\nabla^2 \hat{p} + k^2 \hat{p} = 0, \quad (12)$$

де $k = \omega/c$ - хвильове число.

Представлене рівняння (12) є рівнянням Гельмгольца для комплексного значення тиску акустичної хвилі.

У пакеті скінченних елементів Comsol

поширення акустичної хвилі в частотній області представлено таким рівнянням [3]:

$$\nabla \left(-\frac{1}{\rho} (\nabla \hat{p} - q_d) \right) - \frac{\omega^2 \hat{p}}{\rho c^2} = Q_m, \quad (13)$$

де q_d – дипольне джерело, Н/м³, Q_m – монопольне джерело, с⁻².

Фактично (13) є представленим в частотній області рівнянням (3) із умовами наявності джерел акустичної енергії.

Рівняння (13) не має єдиного вирішення, а залежить від просторового положення акустичної хвилі та граничних умов. З цією метою представимо формулу акустичного левітатора, (рис. 1) [4].

Побудова моделі акустичного левітатора

Модель будемо розглядати для нормальних умов (тиск 1 атм., температура повітря 20 °С). Інші параметри моделі представлено в табл. 1.

Таблиця 1 – Параметри моделі акустичного левітатора

Назва параметра	Значення
Швидкість поширення хвилі	343 м/с
Частота джерела	58 кГц
Довжина акустичної хвилі	5.9 мм
Ширина акустичного джерела	11.8 мм
Ширина моделі	17.7 мм
Висота моделі	14.8 мм
Радіус кривизни границі розділу 5	14.8 мм
Діаметри частинки	0.6 мм
Густина частинки	500 кг/м ³
Об'ємний модуль частинки	2.2 ГПа

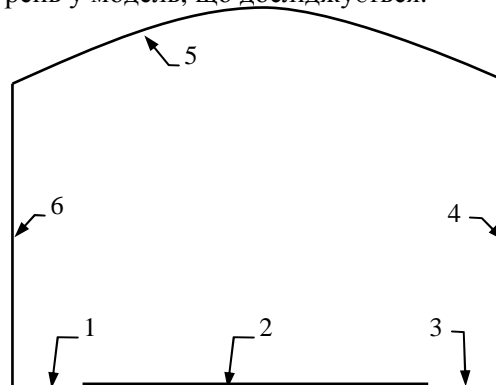
Потрібно зазначити, що діаметр частинки повинен бути набагато меншим за довжину хвилі. Густина частинок розглядається, оскільки модель левітатора є під дією гравітаційного поля земного тяжіння.

Обчислення проводитимемо при таких початкових умовах $p = 0$.

Левітатор створює акустичну хвилю, що поширюється в протилежному напрямку до вектору земного тяжіння, від границі розділу 2 до 5. В результаті створюється стояча хвиля. Акустичну хвилю будемо вважати плоскою.

Границі розділу левітатора 1, 3, 4, 6 позначимо як випромінюючі, тобто такими, що не відбивають нормальну похилу плоску падаючу хвилю. Такі умови позначають напівнескінчений простір, в якого попадає падаюча хвиля із внесенням мінімальних

збурень у модель, що досліджується.



1-6 – позначення границь розділу, 2 – акустичне джерело

Рисунок 1 – Модель акустичного левітатора.

Граничні умови описуватимуться другим та третім доданками рівняння запропонованого науковцями Джіволі та Нета [3, 5]:

$$\nabla \left(-\frac{1}{\rho} (\nabla \hat{p} - q_d) \right) + i \frac{k_{eq}^2 \hat{p}}{\rho} + \frac{i}{2k_{eq}\rho} \Delta_t \rho = Q_m, \quad (14)$$

де $k_{eq}^2 = (\omega/c)^2 - k_z^2$, k_z – хвильове число в напрямку поширення акустичної хвилі, згенерованої монопольним джерелом Q_m , що є границею розділу 2, Δ_t – оператор Лапласа у тангенціальній площині до будь-якої точки границі розділу.

Коефіцієнт відбиття R_s при випромінюючих граничних умовах (14) можна визначити так [3]:

$$R_s = \left| \frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta + 1} \right|^N, \quad (15)$$

де θ – кут падіння акустичної хвилі на границю розділу середовищ, N – порядок граничної умови, для рівняння (14) $N = 2$. Границю 5 розглядатимемо як тверду для акустичної хвилі. У класичному визначенні Неймана, така гранична умова записується так [6]:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_n, \quad (16)$$

де n – нормаль, a_n – нормальний компонент прискорення елементарного об'єму простору збуреного акустичної хвилею.

Умова (16) показує структурний рух в просторі. Тиск на границі фактично є навантаженням, що пропорційне значенню тиску. Оскільки тиск є скалярною потенційною

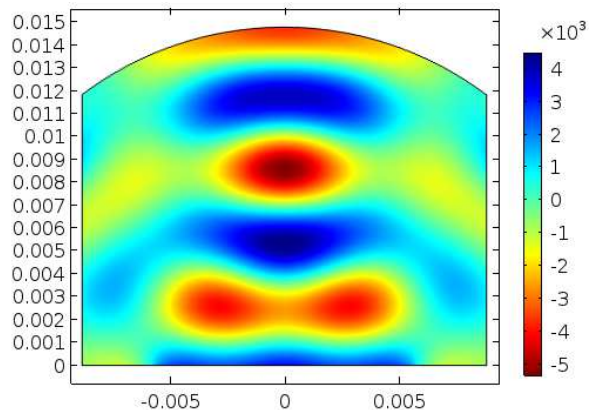
величиною, тому тиск в просторі можна виражати також і через потенціали швидкості (де градієнтом цього потенціалу є швидкість) та потенціалом зміщення (градієнтом потенціалу зміщення є переміщення).

В формі опису поширення хвилі (13), тверда границя розділу середовищ буде описуватись таким рівнянням [3]:

$$-\mathbf{n} \left(-\frac{1}{\rho} (\nabla \hat{p} - q_d) \right) = 0. \quad (17)$$

Проведення обчислення та результати.

Результати обчислення отримаємо, застосувавши пакет скінченних елементів Comsol. Стоячу хвилю обчислимо як розподіл тиску по об'єму левітатора, (рис. 2).



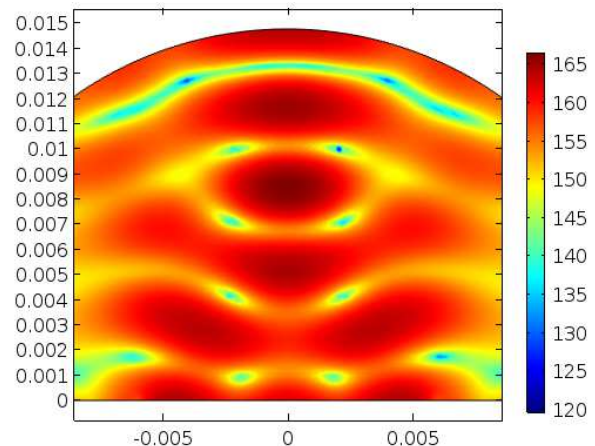
осі абсциси та ординати показують геометричні розміри левітатора, (мм), справа дано шкалу тиску акустичної хвилі, (Па)

Рисунок 2 – Розподіл тиску в левітаторі при утворенні стоячої акустичної хвилі.

Для оцінки сили звукової хвилі обчислимо рівні звукового тиску по об'єму левітатора, (рис. 3). Як можемо побачити, рівень звуку є досить високим.

Для більш детального розгляду розподілу значень тиску по осі левітатора обчислимо абсолютне значення звукового тиску хвилі як функцію довжини осі з одним параметром, (рис. 4).

Для спостереження утворення ефекту левітації частинок в акустичному полі розрахуємо розподіл частинок в просторі і позначимо їх швидкості, (рис. 5) на початку генерування хвилі джерелом і через певний час, наприклад, 0.2 с, (рис. 6).



осі абсциси та ординати показують геометричні розміри левітатора, (мм), справа дано шкалу рівня звукового тиску акустичної хвилі, (дБ)

Рисунок 3 – Розподіл рівнів звукового тиску.

З рисунка можна побачити значення при формуванні стоячої акустичної хвилі.

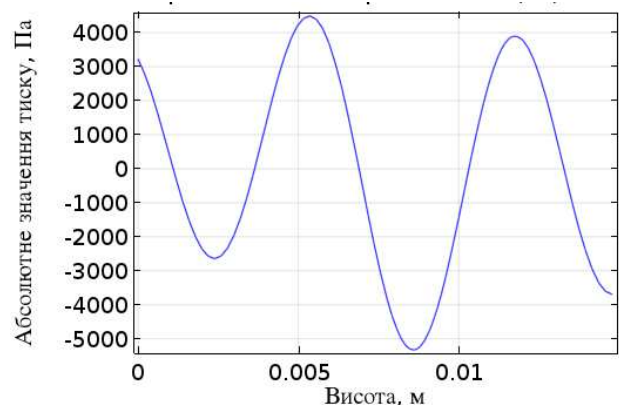


Рисунок 4 – Розподіл тиску по висоті левітатора.

Для спостереження утворення ефекту левітації частинок в акустичному полі розрахуємо розподіл частинок в просторі і позначимо їх швидкості, (рис. 5) на початку генерування хвилі джерелом і через певний час, наприклад, 0.2 с, (рис. 6).

Швидкість частинок обчислюється на основі другого закону Ньютона [3]:

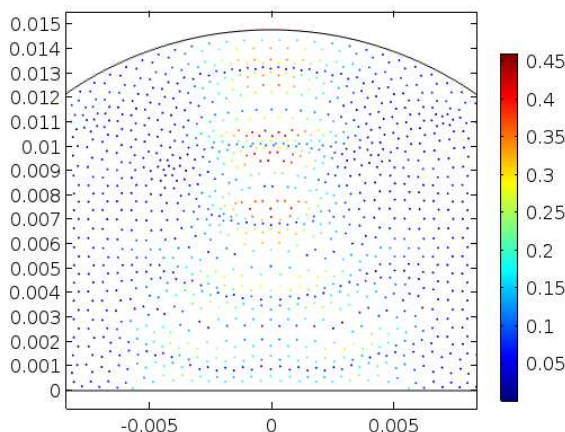
$$d(m_p \mathbf{v}) / dt = \mathbf{F}, \quad (18)$$

де t - час, m_p - маса частинки, \mathbf{v} - вектор швидкості частинки, \mathbf{F} - вектор прикладених зусиль до частинки.

Вектор швидкості визначається так [3]:

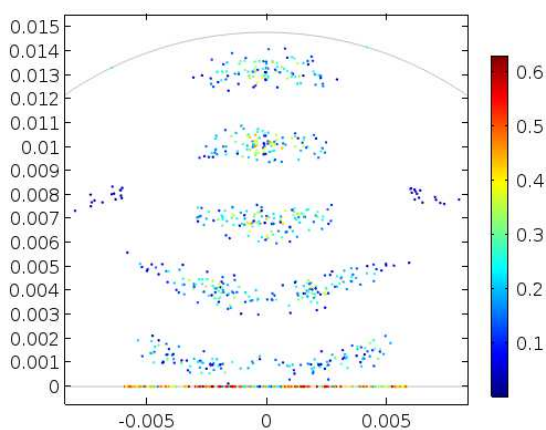
$$v = \frac{dq}{dt}, \quad (19)$$

де q – вектор розташування частинки.



осі абсциси та ординати показують геометричні розміри левітатора, (мм), справа дано шкалу швидкості частинок в акустичному полі, (м/с)

Рисунок 5 – Позиція частинок по висоті левітатора після 0.02 с від початку генерації хвилі.



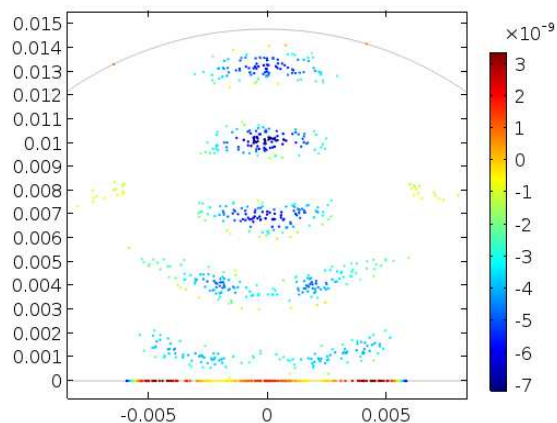
осі абсциси та ординати показують геометричні розміри левітатора, (мм), справа дано шкалу швидкості частинок в акустичному полі, (м/с)

Рисунок 6 – Позиція частинок по висоті левітатора після 0.2 с від початку генерації хвилі.

Як можна побачити із рисунків, на початку генерування акустичної хвилі частинки підіймаються вгору і їх розподіл відповідає фазі плоскої хвилі, що поширюється у нескінченному просторі. Проте після певного

часу, внаслідок взаємодії хвилі із границями розділу відбувається перерозподіл хвильової енергії всередині левітатора, що також і повторюється частинками.

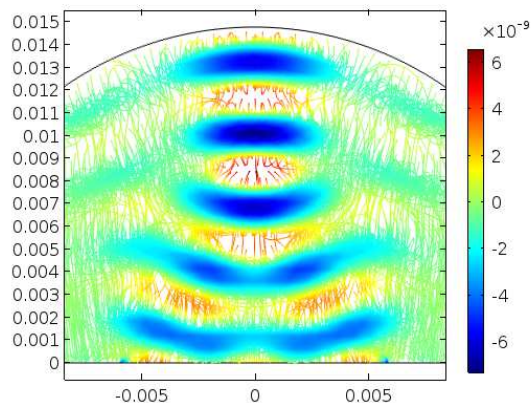
Цікавим є обчислення потенційної енергії частинок, що левітують в акустичній хвилі, (рис. 7).



осі абсциси та ординати показують геометричні розміри левітатора, (мм), справа дано шкалу потенціальної енергії частинок в акустичному полі, (Дж)

Рисунок 7 – Позиція частинок по висоті левітатора після 0.2 с від початку генерації хвилі.

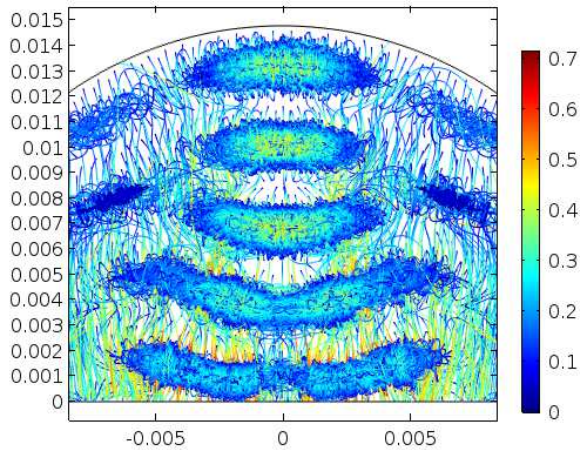
Для більш детального аналізу потенційної енергії частинок, обчислимо траєкторію їх руху із позначенням рівня енергії, (рис. 8).



осі абсциси та ординати показують геометричні розміри левітатора, (мм), справа дано шкалу потенціальної енергії частинок в акустичному полі, (Дж)

Рисунок 8 – Траєкторія та позиція частинок по висоті левітатора після 0.2 с від початку генерації хвилі.

Для співставлення траєкторій потенційної енергії та швидкості руху частинок, обчислимо траєкторії швидкостей, (рис. 9).



осі абсциси та ординати показують геометричні розміри левітатора, (мм), справа дано шкалу швидкості частинок в акустичному полі, (м/с)

Рисунок 9 – Траєкторія та позиція частинок по висоті левітатора після 0.2 с від початку генерації хвилі

ВИСНОВКИ

Розроблено числову модель акустичного левітатора, що дозволила визначити необхідні рівні енергій та комбінацію граничних умов для збудження такої стоячої акустичної хвилі, що може нести частинки, що не є однорідними із власне середовищем поширення хвилі.

Встановлено необхідну масу та об'єм частинок, що можуть бути задіяними в ефекті

акустичної левітації, діаметр яких повинен бути набагато меншим за довжину хвилі.

В результаті обчислень виявлено, що рівень звукового тиску акустичної хвилі повинен мати не менше 165 дБ для встановлення ефекту акустичної левітації.

Отримані математичні моделі та числові дані дозволяють в подальшому застосувати їх для проектування пристроїв в машинобудівних та медичних галузях.

I.T. Rossing Springer Handbook of Acoustics 1st Edition, Springer, 2007, 1182 p. 2. P.G. Bergmann: The wave equation in a medium with a variable index of refraction / P.G. Bergmann // J. Acoust. Soc. Am, 1946.- 17,- P.329–333. 3. Документація на пакет обчислень скінченними елементами Comsol. (www.comsol.com). 4. Acoustic Levitator (www.comsol.com/model/acoustic-levitator-12155). 5. D. Givoli and B. Neta. High-order Non-reflecting Boundary Scheme for Time-dependent Waves // J. Comput. Phys., vol. 186, pp. 24–46, 2004. 6. Bayliss, A., & Turkel, E. Radiation boundary conditions for

wave-like equations // Communications on Pure

and applied Mathematics, 33(6), 707-725.- 1980.

Поступила в редакцію 11.04.2017 р.

Рекомендували до друку: докт.техн.наук, проф. Середюк О.Є., докт. техн. наук, проф. Райтер П.М.